МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

ПОТАПЕНКО ОЛЕКСІЙ ЮРІЙОВИЧ

УДК 517.98+517.954

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ НА НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ МНОГОВИДАХ

01.01.01 — Математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”.

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Богданський Юрій Вікторович,
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,
професор кафедри математичних методів системного аналізу

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Качановський Микола Олександрович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу функціонального аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор
Шевченко Георгій Михайлович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри теорії ймовірностей,
статистики і актуарної математики.

Захист відбудеться «11» вересня 2019 р. о 16^{00} на засіданні спеціалізованої вченої ради К 26.002.31 Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” за адресою:
03056, Київ, пр. Перемоги, 37, корпус № 7, ауд. 423.

З дисертацією можна ознайомитись у Науково-технічній бібліотеці ім. Г.І. Денисенка Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” за адресою:
03056, Київ, пр. Перемоги, 37.

Автореферат розісланий «6» серпня 2019 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Ільєнко М.К.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню крайових задач на нелінійних нескінченновимірних многовидах. З'ясовано технічні умови на ріманів многовид, за яких стає можливим встановити коректність певного класу задач Діріхле для рівнянь з лапласіаном за мірою. Запропоновано метод дифеоморфізмів як спосіб розширення класу коректних крайових задач.

Актуальність теми.

Дослідження крайових задач з нескінченновимірним аргументом є однією з найважливіших задач функціонального аналізу. Предметом дослідження функціонального аналізу є нескінченновимірні топологічні векторні простори, їх відображення та пов'язані об'єкти. Історично функціональний аналіз завдячує своїм виникненням як напрямку дослідженню перетворення Фур'є, диференціальних і інтегральних рівнянь. Однак, у другій половині XX століття функціональний аналіз поповнився такою низкою розділів, отриманих шляхом узагальнення класичної скінченновимірної теорії на нескінченновимірний випадок, що, словами А. Г. Костюченка в передмові редактора перекладу книги Н. Данфорда і Дж. Т. Шварца 1962 року, "Функціональний аналіз за останні два десятиліття настільки розрісся, настільки широко і глибоко проник майже в усі області математики, що зараз навіть складно визначити власне предмет цієї дисципліни".

Потреба в такому узагальненні виникла природнім чином у зв'язку з розвитком математичної фізики; крайові задачі — актуальне питання цієї науки, а отже, розвиток методів побудови та аналізу крайових задач в нескінченновимірних просторах та на нескінченновимірних многовидах є одним з перспективних напрямів розвитку сучасної математики.

Найбільш плідними підходами до розгляду крайових задач в нескінченновимірних просторах виявились імовірнісні методи, варіаційний підхід та метод потенціалів, побудований на основі теорії диференційовних мір.

В скінченновимірному випадку задача Діріхле з (параболічним) диференціальним оператором з імовірнісної точки зору вперше достатньо повно була розглянута Дж. Л. Дубом (1955). Однак, використані методи дослідження не можуть бути розповсюдженими на нескінченновимірний випадок за рахунок відсутності нескінченновимірних аналогів використаних в роботі теорем існування і єдиності розв'язків крайових задач із теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Л. Гросс (1967) першим використав імовірнісний підхід в нескінченновимірному випадку; більш точно, була досліджена перша крайова задача для еліптичних рівнянь на абстрактному вінеровському просторі. До більш пізніх робіт, в яких досліджено крайові задачі в нескінченновимірних просторах з імовірнісної точки зору, відноситься низка робіт 1970-х років М. М. Фролова (1970, 1972, 1973) і робота А. Ю. Хреннікова (1983).

Варіаційний підхід до дослідження задачі Діріхле в нескінченновимірних просторах використовується, наприклад, в роботі М. М. Фролова (1978). Метод потенціалів — в роботі А. А. Беляєва (1982).

Всі наведені роботи розглядають випадок нескінченновимірних просторів. Наскільки відомо автору, крайові задачі на нескінченновимірних многовидах раніше досліджено не було.

В дисертаційній роботі узагальнено на випадок нескінченновимірних многовидів запропонований Ю. В. Богданським (2011) підхід до побудови оператора Лапласа "в L^2-версії" та задачі Діріхле на його основі. Прослідкуються зв'язки наведених досліджень з проблемами теорії випадкових процесів: див. роботу К. В. Ральченка і Г. М. Шевченка (2019).

В дисертаційній роботі використовується апарат поверхневого інтегрування. Однією з перших робіт, в якій було розпочато дослідження поверхневих мір в нескінченновимірному просторі, є класична робота А. В. Скорохода (1975). Цій тематиці було присвячено великий цикл робіт О. В. Угланова, який розробив побудову поверхневих мір на поверхнях скінченної корозмірності в нескінченновимірних просторах. Але цей підхід технічно складний. Інший варіант — підхід В. І. Богачова і О. В. Пугачова. Він ґрунтується на методі Маллявена і є також технічно обтяжливим. Ю. В. Богданським (2011) було запропоновано інший підхід до побудови асоційованої міри для замкненої поверхні корозмірності 1, вкладеної в гільбертів простір. Вказаний підхід до побудови поверхневої міри на поверхні в банаховому многовиді вперше розглядається в роботі Ю. В. Богданського (2012). Узагальнення побудови асоційованої міри на випадок замкненої поверхні довільної скінченної корозмірності, вкладеної в банахів многовид, а також дослідження властивості транзитивності отриманої конструкції виконано в роботах Ю. В. Богданського у співавторстві з ученицею Богданського К. В. Моравецькою (2017).

В дисертаційній роботі використовується аналог поверхневої міри, запропонованої Ю. В. Богданським (2011), для випадку ріманового многовиду.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" в рамках ініціативної теми "Застосування математичних методів в дослідженні інтегральних характеристик детермінованих та стохастичних складних систем" (номер державної реєстрації 0118U003669).

Мета і завдання дослідження. Завдання дисертаційної роботи — дослідження конструкції лапласіана в так званій L^2-версії на нескінченновимірних ріманових многовидах; дослідження класу коректних крайових задач в області на нескінченновимірних ріманових многовидах (задач, які мають, і при тому єдиний, розв'язок). Основна мета роботи — дослідження методів розширення класу коректних крайових задач в L^2-версії на нескінченновимірних ріманових многовидах.

Об'єктом дослідження є еліптичні рівняння з лапласіаном в L^2-версії на рівномірних ріманових многовидах.

Предметом дослідження є коректність еліптичних рівнянь з лапласіаном в L^2-версії на рівномірних ріманових многовидах, перетворення задачі Діріхле спеціального типу при дифеоморфному відображенні між рівномірними рімановими многовидами.

Методи дослідження. В роботі використовувались методи математичного і функціонального аналізу, диференціальної геометрії, теорії міри і інтеграла, елементи теорії матриць.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дисертаційної роботи, які визначають її наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

- Побудовано нетривіальні приклади певного класу нескінченновимірних ріманових многовидів, наділених рівномірним атласом. Досліджено зв'язок внутрішньої метрики з вихідною топологією.
- Запропоновано L^2-версію лапласіана за мірою на (нескінченновимірному) рімановому многовиді.
- З'ясовано технічні умови на ріманів многовид, за яких стає можливим встановити коректність (існування та єдиність розв'язку) певного класу задач Діріхле для рівнянь з лапласіаном за мірою.
- Наведено нетривіальний модельний приклад ріманового многовиду, що задовольняє усі технічні умови, використані при побудові лапласіана та доведенні коректності задач Діріхле.
- Запропоновано метод дифеоморфізмів як спосіб розширення класу коректних крайових задач.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Результати можуть бути використані у подальших дослідженнях крайових задач в гільбертових просторах та на ріманових многовидах.

Особистий внесок здобувача. Постановка задачі, визначення напрямку та плану дослідження належить науковому керівнику здобувача доктору фіз.-мат. наук, професору Ю. В. Богданському. За результатами дисертації автором опубліковано п'ять робіт, дві з них у співавторстві з науковим керівником. У спільних роботах особисті внески співаторів є рівноцінними.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювалися на наукових конференціях та семінарах:

- XIV Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики", м. Київ, 26-27.05.16.

- III Міжнародна конференція “Зимові наукові читання”, м. Київ, 31.01.18.
- 4th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Ukraine Valery Sergeevich Melnik, м. Київ, 04-06.04.18.
- Науковий семінар “Алгебра і аналіз” кафедри математичних методів системного аналізу, Інститут прикладного системного аналізу, Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 12.04.18.
- Науковий семінар “Київський семінар з функціонального аналізу” Інституту математики НАН України, 16.01.19.
- Науковий семінар “Сучасний аналіз” кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей, Фізико-математичний факультет, Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 17.01.19.

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 8 наукових праць, у тому числі 5 статей у наукових фахових виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз, 3 матеріали та тези доповідей конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку зі списком опублікованих праць здобувача за темою дисертації і наукових семінарів та конференцій, на яких доповідались отримані результати. Основний текст дисертації складає 131 сторінку, список використаних джерел має обсяг 7 сторінок та складається з 60 найменувань.

Користуючись нагодою, автор висловлює щиру подяку науковому керівнику Юрію Вікторовичу Богданському за наукове керівництво роботою, цінні зауваження при обговоренні результатів та постійну увагу.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У **вступі** до дисертації обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету роботи, висвітлено наукову новизну. Розглянуто структуру роботи, а також наведено інформацію щодо апробації результатів та публікацій за темою дисертації.

У **першому розділі** проведено огляд робіт, що мають відношення до теми дисертаційного дослідження. Наведено огляд класичних результатів ріманової геометрії. Проведено огляд ряду сучасних робіт з ріманової геометрії, присвячених еліптичним рівнянням на ріманових многовидах. Розглянуто диференційовність мір уздовж напрямків і уздовж векторних полів.

У **другому розділі** розглянуто нескінченновимірні ріманові многовиди. *Ріманів многовид* $\mathcal{M}$ визначається як сукупність дійсного гільбертового многовиду класу C^2 з модельним простором H і заданого на ньому *метричного тензора* g. Метричний тензор — гладке симетричне строго додатньо визначене тензорне поле типу $(2,0)$: в кожній точці $p \in \mathcal{M}$ тензор g_p є симетричним білінійним обмеженим відображенням $g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$, для якого виконуються умови:

- для будь-яких точки $p \in \mathcal{M}$ і карти (U, φ) в точці p існує таке $\delta^{\varphi} > 0$, що для довільних векторів ξ_1, ξ_2 з простору $T_p\mathcal{M}$:

$$g_p(\xi_1, \xi_2) = g_p(\xi_2, \xi_1); g_p(\xi_1, \xi_1) \geqslant \delta^{\varphi} \|\xi_1^{\varphi}\|_H^2,$$

- для будь-яких області G в $\mathcal{M}$ і гладких векторних полів $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ на G:

функція аргумента q $g_q(\mathbf{X}_q, \mathbf{Y}_q)$ належить класу C^1 на G.

Метричний тензор дозволяє визначити норму на дотичному просторі, а отже і довжину кусково-гладкого шляху. Внутрішня метрика ρ на зв'язному рімановому многовиді визначається як інфімум довжин кусково-гладких кривих, що поєднують відповідні точки. При подальших дослідженнях виникає потреба наявності метричної повноти многовиду за внутрішньою метрикою. Наступна властивість атласу многовиду забезпечує бажану повноту.

Означення 2.2. Атлас $\Omega = \{(\varphi, U_{\varphi})\}$ ($\varphi : U_{\varphi} \longrightarrow H$) будемо називати *рівномірним*, якщо існують такі $r > 0, \delta^-, \delta^+ > 0$, що

1) для кожної точки $p \in \mathcal{M}$ існує така карта (φ_p, U_p), що $\varphi_p(U_p) \supset B_r(\varphi_p(p))$, де $B_r(\varphi_p(p)) \triangleq \{q \in H : \|\varphi_p(p) - q\| < r\}$.
2) для кожних $p \in \mathcal{M}, q \in U_p, \xi \in T_q\mathcal{M}$ виконується $\delta^- \|\xi^{\varphi_p}\|^2 \leqslant \|\xi\|_H^2 \leqslant$ $\leqslant \delta^+ \|\xi^{\varphi_p}\|^2$ для карти (φ_p, U_p) з пункту 1).

Ріманів многовид із зафіксованим на ньому рівномірним атласом будемо називати *рівномірним*.

***Твердження* 2.1.** *Рівномірний ріманів многовид $\mathcal{M}$ є метрично повним за внутрішньою метрикою.*

Проведено дослідження узгодженості внутрішньої метрики і вихідної топології многовиду.

***Твердження* 2.2.** *Нехай $\mathcal{M}$ — ріманів многовид, ρ — його внутрішня метрика. Тоді топологія, породжена ρ, не слабша за вихідну топологію $\mathcal{M}$.*

Твердження 2.3. *Нехай $\mathcal{M}$ — ріманів многовид, ρ — його внутрішня метрика; в кожній його точці $p \in \mathcal{M}$ існують такі карта (φ, U) та число $\delta_+^\varphi > 0$, що виконується умова*

$$\forall q \in U, \xi \in T_q\mathcal{M} : g_q(\xi, \xi) \leqslant \delta_+^\varphi \|\xi^\varphi\|_H^2.$$

Тоді топологія, породжена ρ, співпадає з вихідною топологією $\mathcal{M}$.

Зокрема умова твердження 2.3 виконується у випадку рівномірності атласу многовиду.

Досліджено питання повноти дотичного простору $T_p\mathcal{M}$. За рахунок строгої додатності метричного тензора, зі збіжності (фундаментальності) послідовності векторів в дотичному просторі $T_p\mathcal{M}$ випливає збіжність (відповідно, фундаментальність) відповідної послідовності представлень векторів в модельному просторі H. Для доведення оберненої імплікації, а отже і повноти простору $T_p\mathcal{M}$, здається необхідним вимагати наявність додаткової властивості, вже знайомої з наведеного твердження 2.3.

Твердження 2.4. *Нехай $\mathcal{M}$ — ріманів многовид, для $p \in \mathcal{M}$ існують такі карта (φ, U) та число $\delta_+^\varphi > 0$, що виконується умова:*

$$\forall q \in U, \xi \in T_q\mathcal{M} : g_q(\xi, \xi) \leqslant \delta_+^\varphi \|\xi^\varphi\|_H^2.$$

Тоді дотичний простір $T_p\mathcal{M}$ буде повним.

Умова твердження 2.4 виконується в кожній точці у випадку виконання умови рівномірності.

Запропоновано конструкцію косинуса кута між підпросторами гільбертова простору, що узагальнює стереометричне поняття кута між площинами/прямими.

Означення 2.3. Для підпросторів $A, B \neq \{0\}$ гільбертового простору H покладемо

$$\cos\measuredangle(A, B) \triangleq \max\left\{\inf_{y\in B\setminus\{0\}} \sup_{x\in A\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x, y); \inf_{x\in A\setminus\{0\}} \sup_{y\in B\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x, y)\right\},$$

де $\cos\measuredangle(x, y) = \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$ — косинус кута між векторами x і y.

Відмічено певний зв'язок між введеним поняттям косинуса кута і розхилом між підпросторами: для підпросторів A, B однакової скінченної (ко)розмірності виконується

$$\cos\measuredangle(A, B) = 1 - \frac{1}{2}\hat{d}^2(A, B),$$

означення метрики $\hat{d}$ дивитися, наприклад, в роботі Т. Като (1972).

Отримано ряд результатів стосовно косинуса кута між підпросторами, які в подальшому використовуються для побудови нетривіальних прикладів рівномірного ріманового многовиду.

***Лема* 2.3.** *Нехай $A = \{n_1, n_2, \dots n_k\}^\perp, B = \{m_1, m_2, \dots m_p\}^\perp$ — підпростори скінченної корозмірності (k і p, відповідно) в гільбертовому просторі H, при чому $k \geqslant p$ і $\{n_1, n_2, \dots n_k\}, \{m_1, m_2, \dots m_p\}$ — ортонормовані системи. Тоді:*

$$\cos\measuredangle(A, B) = \sigma_{\min}(\mathbb{\Gamma}) = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbb{\Gamma}^*\mathbb{\Gamma})},$$

де

$$\mathbb{\Gamma} = \begin{pmatrix} (n_1, m_1) & \dots & (n_1, m_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (n_k, m_1) & \dots & (n_k, m_p) \end{pmatrix}.$$

***Зауваження* 2.4.** *Для A, B — замкнених підпросторів однакової скінченної корозмірності — виконується*

$$\cos\measuredangle(A, B) = \inf_{y \in B\setminus\{0\}} \sup_{x \in A\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x, y) = \inf_{x \in A\setminus\{0\}} \sup_{y \in B\setminus\{0\}} \cos\measuredangle(x, y).$$

***Наслідок* 2.1.** *Нехай $A = \{\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots \tilde{n}_k\}^\perp, B = \{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots \tilde{m}_k\}^\perp$ — підпростори однакової скінченної корозмірності k в H: $\{\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots \tilde{n}_k\}$ і $\{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots \tilde{m}_k\}$ — лінійно незалежні системи. Тоді:*

$$\cos\measuredangle(A, B) \geqslant \frac{|\det \widetilde{\mathbb{\Gamma}}|}{\prod\limits_{i=1}^{k} \|\tilde{n}_i\| \prod\limits_{i=1}^{k} \|\tilde{m}_i\|} \left(\frac{k-1}{k^2}\right)^{\frac{k-1}{2}},$$

де 0^0 (у випадку $k = 1$) вважаємо за 1, а також:

$$\widetilde{\mathbb{\Gamma}} = \begin{pmatrix} (\tilde{n}_1, \tilde{m}_1) & \dots & (\tilde{n}_1, \tilde{m}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde{n}_k, \tilde{m}_1) & \dots & (\tilde{n}_k, \tilde{m}_k) \end{pmatrix}.$$

Побудовані такі приклади рівномірного ріманового многовиду.

***Теорема* 2.1.** *Нехай H — гільбертовий простір. $\mathcal{M} = \{x \in H : F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_n(x) = 0\}$ — гладка (F_i — гладкі функціонали, визначені на H) поверхня спільного рівня корозмірності n ($\{\mathbf{grad}\, F_1(p), \mathbf{grad}\, F_2(p), \dots \mathbf{grad}\, F_n(p)\}$ — лінійно незалежна система в кожній точці $p \in \mathcal{M}$). Нехай також існують такі*

$\delta, \varepsilon > 0$, що для будь-яких точок $p, q \in \mathcal{M}$ таких, що $\|p-q\| < \delta$, виконується:

$$\frac{\begin{vmatrix} (\mathbf{grad}\, F_1(p), \mathbf{grad}\, F_1(q)) & \cdots & (\mathbf{grad}\, F_1(p), \mathbf{grad}\, F_n(q)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{grad}\, F_n(p), \mathbf{grad}\, F_1(q)) & \cdots & (\mathbf{grad}\, F_n(p), \mathbf{grad}\, F_n(q)) \end{vmatrix}}{\prod\limits_{i=1}^{n} \|\,\mathbf{grad}\, F_i(p)\| \prod\limits_{i=1}^{n} \|\,\mathbf{grad}\, F_i(q)\|} \geqslant \varepsilon.$$

Тоді $\mathcal{M}$ — рівномірний ріманів многовид.

Наслідок 2.2. *Нехай H — гільбертовий простір. $\mathcal{M} = \{x \in H : F(x) = 0\}$ — поверхня рівня корозмірності 1. Нехай функція F — гладка класу C^2, а також існують такі $K, M > 0$, що для всіх $x \in \mathcal{M}, y \in$ о.о.$(\mathcal{M})$, де о.о. — опукла оболонка, виконується:*

$$\|F'(x)\| \geqslant K, \|F''(y)\| \leqslant M.$$

Тоді $\mathcal{M}$ — рівномірний ріманів многовид.

Наслідок 2.3. *Нехай H — гільбертовий простір. $\mathcal{M} = \{x \in H : F_1(x) = F_2(x) = 0\}$ — поверхня рівня корозмірності 2 ($\mathbf{grad}\, F_1(x), \mathbf{grad}\, F_2(x)$ — л.н.з). Нехай функції F_1, F_2 — гладкі класу C^2, а також існують такі $K, M > 0$ і $C \in [0, 1)$, що для $i = 1, 2$ і для всіх $x \in \mathcal{M}, y \in$ о.о.$(\mathcal{M})$ виконується:*

$$\|F_i'(x)\| \geqslant K, \|F_i''(y)\| \leqslant M,$$

$$\frac{|(\mathbf{grad}\, F_1(x), \mathbf{grad}\, F_2(x))|}{\|\,\mathbf{grad}\, F_1(x)\| \cdot \|\,\mathbf{grad}\, F_2(x)\|} \leqslant C.$$

Тоді $\mathcal{M}$ — рівномірний ріманів многовид.

Теорема 2.2. *Нехай H — гільбертовий простір. $D \subset H$ — область з гладкою межею, $\mathcal{M} \triangleq \partial D$, $\mathbf{n}$ — поле зовнішніх одиничних нормалей до $\mathcal{M}$. Нехай існують такі $\delta, \varepsilon > 0$, що для будь-яких точок $p, q \in \mathcal{M}$ таких, що $\|p-q\| < \delta$, виконується:*

$$(\mathbf{n}(p), \mathbf{n}(q)) \geqslant \varepsilon.$$

Тоді $\mathcal{M}$ — рівномірний ріманів многовид.

Третій розділ присвячено лапласіану за мірою і задачі Діріхле на його основі.

Наводяться позначення просторів функціоналів і векторних полів на многовиді та його області. Позначимо через $C_b(\mathcal{M})$ простір всіх обмежених неперервних дійсних функцій на $\mathcal{M}$, через $C_{b;v}(\mathcal{M})$ простір всіх неперервних обмежених векторних полів на $\mathcal{M}$, через $C_b^1(\mathcal{M})$ (відповідно $C_{b;v}^1(\mathcal{M})$) простір всіх функцій $f \in C_b(\mathcal{M})$ (відповідно всіх векторних полів $\mathbf{X} \in C_{b;v}(\mathcal{M})$), диференційовних в кожній точці $x \in \mathcal{M}$ з неперервною і обмеженою на всьому $\mathcal{M}$ похідною $f'(\cdot)$ (відповідно $\mathbf{X}'(\cdot)$). Тут $f'(p) \in T_p^*\mathcal{M}$ визначено формулою $f'(p) : T_p\mathcal{M} \ni \mathbf{Y}_p \longmapsto \mathbf{Y}_p f \in \mathbb{R}$, $\mathbf{X}'(p)$ — лінійний оператор в $T_p\mathcal{M}$, визначений формулою $\mathbf{X}'(p) : \mathbf{Y}_p \longmapsto \longmapsto \nabla_{\mathbf{Y}_p}\mathbf{X}$, де ∇ — зв'язність Леві–Чивіти на $\mathcal{M}$.

Нехай G — обмежена область в $\mathcal{M}$ з межею $S = \partial G$. Через $C^1(G)$ позначимо сукупність всіх функцій на $\overline{G}$, що допускають продовження на весь $\mathcal{M}$ до функцій класу $C_b^1(\mathcal{M})$; через $C_0^1(G)$ — сукупність функцій з $C^1(G)$, носії яких не перетинаються з деякою ε-межею S. Аналогічно визначаємо

$$C(G) = \left\{ f\big|_{\overline{G}} \,\middle|\, f \in C_b(\mathcal{M}) \right\} \text{ і } C_v^1(G) = \left\{ \mathbf{X}\big|_{\overline{G}} \,\middle|\, \mathbf{X} \in C_{b;v}^1(\mathcal{M}) \right\}.$$

Нехай σ — скінченна невід'ємна борелівська міра на $\mathcal{M}$. Через $L^p(G) = L^p(G,\sigma)$ ($1 \leqslant p < \infty$) позначимо простір вимірних функцій на G, які при піднесенні до степеня p є інтегровними по відношенню до міри $\sigma\big|_G$.

Векторне поле $\mathbf{X}$ на $\mathcal{M}$ назвемо *вимірним*, якщо існує така послідовність векторних полів $\mathbf{X}_m \in C_{b;v}(\mathcal{M})$, що збігається до $\mathbf{X}$ майже всюди ($\|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\| \longrightarrow 0 \pmod{\sigma}$).

Означення 3.3. Для $1 \leqslant p < \infty$ будемо казати, що вимірне векторне поле $\mathbf{X}$ на $\mathcal{M}$ *інтегровне зі степенем* p, тобто належить простору $L_v^p(\mathcal{M}) = L_v^p(\mathcal{M},\sigma)$, якщо існує така послідовність векторних полів $\mathbf{X}_m \in C_{b;v}(\mathcal{M})$, що збігається до $\mathbf{X}$ майже всюди і виконується

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}_m(\cdot) - \mathbf{X}(\cdot)\|^p \, d\sigma = 0.$$

Векторні поля з $L_v^1(\mathcal{M}) = L_v^1(\mathcal{M},\sigma)$ і $L_v^2(\mathcal{M}) = L_v^2(\mathcal{M},\sigma)$ назвемо, відповідно, *інтегровними* і *інтегровними з квадратом*.

Доведено критерій інтегровності векторного поля зі степенем p.

***Теорема* 3.1.** *Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Для того, щоб вимірне векторне поле $\mathbf{X}$ на $\mathcal{M}$ належало $L_v^p(\mathcal{M},\sigma)$, необхідно і достатньо, щоб простору $L^p(\mathcal{M},\sigma)$ належала функція $\|\mathbf{X}(\cdot)\|$.*

Скалярний добуток в $L_v^2(\mathcal{M})$ задаємо формулою:

$$(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{X}(\cdot),\mathbf{Y}(\cdot))_{(\cdot)}\, d\sigma = \int_{\mathcal{M}} g_{(\cdot)}(\mathbf{X}(\cdot),\mathbf{Y}(\cdot))\, d\sigma,$$

а відповідну норму $\mathbf{X}$ позначимо символом $|\!|\!|\mathbf{X}|\!|\!|$.

Для векторного поля $\mathbf{X} \in L_v^p(\mathcal{M})$ відповідно норму позначимо

$$|\!|\!|\mathbf{X}|\!|\!|_p \triangleq \left(\int\limits_{\mathcal{M}} \|\mathbf{X}(\cdot)\|^p \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доведено повноту простору $L_v^p(\mathcal{M})$ за нормою $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_p$.

Теорема 3.2. *Для будь-якого p : $1 \leqslant p < \infty$ векторний простір $L_v^p(\mathcal{M})$ є повним.*

Розглядається (нескінченновимірний) ріманів многовид $\mathcal{M}$ з модельним простором H і основним тензором g. σ — скінченна невід'ємна борелівська міра на $\mathcal{M}$. Вважаємо, що атлас многовиду $\mathcal{M}$ є рівномірним, що гарантує його метричну повноту, а також повноту просторів $L_v^p(\mathcal{M}, \sigma)$.

Вважаємо, що міра σ має повний носій (для кожної непустої відкритої множини $U \subset \mathcal{M}$ виконана нерівність $\sigma(U) > 0$), завдяки чому із рівності $u = v \pmod{\sigma}$ (тут $u, v \in C_b^1(\mathcal{M})$) випливає рівність $\mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\, v \pmod{\sigma}$. Тим самим коректно визначено оператор

$$\mathbf{grad} = \mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}) \supset C_b^1(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}\, u \in L_v^2(\mathcal{M}).$$

Оскільки $C_b^1(\mathcal{M})$ щільно в $L^2(\mathcal{M})$, коректно визначено оператор

$$\mathrm{div} = -(\mathbf{grad})^* : L_v^2(\mathcal{M}) \longrightarrow L^2(\mathcal{M}).$$

У випадку, коли $\mathbf{grad}$ допускає замикання, лапласіан (за мірою σ) на $\mathcal{M}$ визначено формулою

$$\Delta = \mathrm{div} \circ \overline{\mathbf{grad}},$$

де Δ — самоспряжений оператор в $L^2(\mathcal{M})$.

Нехай межа S обмеженої області $G \subset \mathcal{M}$ є гладким вкладеним в $\mathcal{M}$ підмноговидом корозмірності 1, а поле зовнішньої нормалі межі S може бути продовжено до векторного поля $\mathbf{n} \in C_{b;v}^1(\mathcal{M})$.

У тому випадку, коли міра σ диференційовна вздовж поля $\mathbf{n}$ в сильному сенсі, говоримо про "узгодженість S з мірою σ". При узгодженості міри σ з поверхнією $S = \partial G$ на S індукується поверхнева міра τ.

Оператор

$$\mathbf{grad}_G : L^2(G) \supset C^1(G) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}\, u \in L_v^2(G)$$

є щільно визначеним, оскільки виконується наступне твердження.

***Твердження* 3.3.** *Нехай G – область в $\mathcal{M}$ така, що $\sigma(\partial G) = 0$. Тоді $C_0^1(G)$ щільно в $L^2(G)$.*

У випадку, якщо оператор $\mathbf{grad}_G$ допускає замикання, а $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n}$ — логарифмічна похідна міри σ вздовж векторного поля $\mathbf{n}$ — лежить в $L^\infty(\mathcal{M})$, є коректною побудова оператора сліду

$$\gamma : L^2(G) \longrightarrow L^2(S) = L^2(S, \tau)$$

з областю визначення $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_G)$, який для функцій $u \in C^1(G)$ співпадає з оператором обмеження: $u \mapsto u\big|_S$. Оператор γ є обмеженим оператором із банахова в нормі графіка простору $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_G)$ в $L^2(S, \tau)$.

Оператор $\operatorname{div}_G : L_v^2(G) \longrightarrow L^2(G)$ введемо формулою

$$\operatorname{div}_G \triangleq -\left(\overline{\mathbf{grad}}_G\Bigg|_{\operatorname{Ker}\gamma}\right)^* .$$

Лапласіан — оператор $\Delta_G : L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$ — визначимо формулою: $\Delta_G \triangleq$ $\triangleq \operatorname{div}_G \circ \overline{\mathbf{grad}}_G$; Δ_G є щільно визначеним, оскільки він є розширенням самоспряженого оператора $-\left(\overline{\mathbf{grad}}_G\right)^* \overline{\mathbf{grad}}_G$.

Важливою частиною третього розділу є побудова прикладу ріманового многовиду, на якому виконуються всі припущення, що використовуються при побудові операторів $\overline{\mathbf{grad}}$, div_G і Δ_G. Приклад такого многовиду будується в якості поверхні в гільбертовому просторі.

***Теорема* 3.3.** *Нехай D — обмежена область в сепарабельному гільбертовому просторі H, $\mathbf{N} \in C_{b;v}^1(H)$ — векторне поле в H, яке є продовженням поля зовнішньої одиничної нормалі до межі $\mathcal{M} = \partial D$ області D, хай виконується умова теореми 2.2, μ — борелівська скінченна (невід'ємна) диференційовна вздовж поля $\mathbf{N}$ міра в H, μ має повний носій, $\operatorname{div}_\mu \mathbf{N} \in L^\infty(H)$, σ — міра на $\mathcal{M}$, індукована мірою μ. Нехай також оператор $\mathbf{grad} : L^2(H) \supset C_b^1(H) \longrightarrow L_v^2(H)$ допускає замикання. Тоді індукований на $\mathcal{M}$ оператор*

$$\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}, \sigma) \supset C_b^1(\mathcal{M}) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}_{\mathcal{M}}\, u \in L_v^2(\mathcal{M}, \sigma)$$

є коректно визначеним і допускає замикання.

Відмітимо, що умови на міру μ, що накладаються в теоремі 3.3, можуть бути реалізованими. Побудова такої міри проводиться, наприклад, в роботі Ю. В. Богданського (2014) як згладження спеціальним чином вздовж поля $\mathbf{N}$ гаусової міри, кореляційний оператор якої має щільний образ в H.

Доведена коректність задачі Діріхле в області ріманового многовиду при виконанні деяких технічних умов.

Теорема 3.4. *При виконанні технічних умов*

а) векторне поле $\mathbf{n}$ *є повним і міра* σ *диференційовна вздовж поля* $\mathbf{n}$ *(узгодженість* S *і* σ*);*

б) $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n} \in L^\infty(\mathcal{M})$*;*

в) оператор $\mathbf{grad}_G$ *допускає замикання;*

задача

$$\Delta_G u - a \cdot u = f,$$
$$\gamma(u) = \varphi$$

в області G *ріманового многовиду* $\mathcal{M}$ *має, і притому єдиний, розв'язок.*

При побудові модельного прикладу ріманового многовиду будувалася міра σ на $\mathcal{M}$ така, що оператор $\mathbf{grad}_\mathcal{M}$ допускає замикання. Виконавши процедуру згладження, ми отримаємо міру, що задовольняє умови а), б). Залишається для такої міри довести умову в), що і зроблено в наступній теоремі.

Теорема 3.5. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— ріманів многовид класу* C^2*,* σ *— скінченна борелівська міра на* $\mathcal{M}$ *з повним носієм, оператор* $\mathbf{grad} = \mathbf{grad}_\mathcal{M} : L^2(\mathcal{M}, \sigma) \supset C_b^1(\mathcal{M}) \ni$ $\ni u \longmapsto \mathbf{grad}\, u \in L_v^2(\mathcal{M}, \sigma)$ *допускає замикання.* G *— обмежена область в* $\mathcal{M}$*, межа якої узгоджена з мірою* σ*, і для відповідного векторного поля* $\mathbf{n} \in C_b^1(\mathcal{M})$ *(продовження поля одиничної зовнішньої нормалі до* $S = \partial G$*)* $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n} \in L^\infty(\sigma)$*. Для* $u \in C^1(G)$ *покладемо* $\mathbf{grad}_G\, u = (\mathbf{grad}\, \tilde{u})\big|_G$ *(*$\tilde{u} \in C_b^1(\mathcal{M})$ *— продовження* u *на* $\mathcal{M}$*). Тоді оператор* $\mathbf{grad}_G : L^2(G; \sigma) \supset C^1(G) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}_G\, u \in L_v^2(G; \sigma)$ *допускає замикання.*

У **четвертому розділі** досліджується дифеоморфне відображення між нескінченновимірними рімановими многовидами з рівномірними атласами як спосіб розширення класу коректних крайових задач.

В цьому розділі $\mathcal{M}_1$ і $\mathcal{M}_2$ — сепарабельні ріманові многовиди класу C^2 з рівномірними атласами Ω_1 і Ω_2, відповідно; $F : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ — обмежений дифеоморфізм між ними, тобто, існує таке $K > 0$, що $\|F'(p)\|, \|(F^{-1})'(q)\| \leqslant K$ для всіх $p \in \mathcal{M}_1, q \in \mathcal{M}_2$; G_1 — область в $\mathcal{M}_1$ з гладкою межею $S_1 = \partial G_1$, $G_2 \triangleq F(G_1)$, $S_2 \triangleq \partial G_2 = F(S_1)$; μ_1 — скінченна борелівська міра на $\mathcal{M}_1$.

Означення 4.1. Векторне поле $\mathbf{Z} \in C_{b;v}^1(\mathcal{M})$ будемо називати *строго трансверсальним* до S, якщо існує $\delta > 0$ таке, що для кожної точки $p \in S$ виконується $d(\mathbf{Z}(p), T_pS) \geqslant \delta$ (тут $d(\mathbf{Z}(p), T_pS) = \inf \Big\{ \|\mathbf{Z}(p) - \xi\| \;\Big|\; \xi \in T_pS \Big\}$).

Лема 4.1. *Нехай* $\mathbf{n}_1 \in C_{b;v}^1(\mathcal{M}_1)$ *— строго трансверсальне до* S_1 *векторне поле. Тоді векторне поле* $\mathbf{n}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{n}_1(F^{-1}(\cdot))$ *строго трансверсальне до* S_2*.*

***Лема* 4.2.** *Нехай* $\mathbf{grad}_{G_1}$ *коректно заданий (міра* μ_1 *має повний носій) і допускає замикання в* $L^2(G_1;\mu_1)$*; для* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_2)$ $\mu_2(A) \triangleq \mu_1(F^{-1}(A))$*. Також*

$$\overline{\mathbf{grad}}_{G_1} f = 0 \ (\operatorname{mod} \mu_1) \Leftrightarrow f = \text{const} \ (\operatorname{mod} \mu_1).$$

Тоді оператор $\mathbf{grad}_{G_2}$ *також коректно заданий і допускає замикання в* $L^2(G_2;\mu_2)$ *і*

$$\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} f = 0 \ (\operatorname{mod} \mu_2) \Leftrightarrow f = \text{const} \ (\operatorname{mod} \mu_2).$$

***Лема* 4.3.** *Для векторного поля* $\mathbf{n}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{n}_1(F^{-1}(\cdot))$ *і міри* $\mu_2(A) = \mu_1(F^{-1}(A))$ *виконується*

$$\operatorname{div}_{\mu_2} \mathbf{n}_2 = (\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1) \circ F^{-1}.$$

***Наслідок* 4.1.** *Якщо* $\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1\Big|_{G_1} \in L^\infty(G_1)$*, то* $\operatorname{div}_{\mu_2} \mathbf{n}_2\Big|_{G_2} \in L^\infty(G_2)$*.*

Відповідно до леми 4.2 і наслідку 4.1, з умов, що дозволяють коректно визначити граничний оператор сліду γ_1

$$\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}) \longrightarrow L^2(S_1) = L^2(S_1;\tau_1),$$

(τ_1 — поверхнева міра, породжена мірою μ_1) тобто, з існування замикання оператора $\mathbf{grad}_{G_1}$ і умови $\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1\Big|_{G_1} \in L^\infty(G_1)$, випливають аналогічні умови, що дозволяють визначити граничний оператор сліду γ_2

$$\gamma_2 : \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}) \longrightarrow L^2(S_2) = L^2(S_2;\tau_2),$$

де τ_2 — поверхнева міра, породжена мірою μ_2.

Оператори γ_1 і γ_2 пов'язані наступним чином.

***Твердження* 4.2.** *Нехай* $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1})$*. Тоді* $u \circ F^{-1} \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2})$ *і*

$$\gamma_2(u \circ F^{-1}) = \gamma_1(u) \circ F^{-1}.$$

Існування граничних операторів сліду дозволяє побудувати дивергенції за мірою вже описаним в третьому розділі способом

$$\operatorname{div}_{G_1} \triangleq -\left(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}\Big|_{\operatorname{Ker}\gamma_1}\right)^*; \quad \operatorname{div}_{G_2} \triangleq -\left(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}\Big|_{\operatorname{Ker}\gamma_2}\right)^*.$$

Наступна лема встановлює зв'язок між операторами div_{G_1} і div_{G_2}.

***Лема* 4.4.** *Нехай* $\mathbf{Z}_1 \in \mathcal{D}(\operatorname{div}_{G_1})$, $\mathbf{Z}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{Z}_1(F^{-1}(\cdot))$. *Тоді* $\mathbf{Z}_2 \in$ $\in \mathcal{D}(\operatorname{div}_{G_2})$ *і*

$$\operatorname{div}_{G_2} \mathbf{Z}_2 = (\operatorname{div}_{G_1} \mathbf{Z}_1) \circ F^{-1}.$$

Нехай $\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}$ допускає замикання і виконана умова $\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1\Big|_{G_1} \in L^\infty(G_1)$, а значить, коректно визначені оператори $\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}$, γ_1 і div_{G_1}. Завдяки лемам 4.1-4.2 і наслідку 4.1, ми можемо стверджувати, що оператори $\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}$, γ_2 і div_{G_2} також коректно визначені. В такому разі справедлива наступна теорема.

***Теорема* 4.1.** *Функція* $u_1 = u_2 \circ F$ *буде розв'язком задачі Діріхле*

$$\operatorname{div}_{G_1}(k \cdot \overline{\mathbf{grad}}_{G_1} u) - a \cdot u = f,$$

$$\gamma_1(u) = \varphi$$

тоді і тільки тоді коли u_2 *буде розв'язком наступної задачі, яку назвемо* F-асоційованою *з нею*

$$\operatorname{div}_{G_2}\left((k \circ F^{-1}) \cdot F'(F^{-1}(\cdot))\left(F'(F^{-1}(\cdot))\right)^* \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u\right) - (a \circ F^{-1}) \cdot u = f \circ F^{-1},$$

$$\gamma_2(u) = \varphi \circ F^{-1}.$$

У прикладі 1 дослідження певного класу крайових задач на області в гільбертовому просторі зводиться до задачі Діріхле спеціального типу. Покладемо $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = H$ — гільбертів простір; $G_2 \subset \{y \in H : K_1 \leqslant \|y\| \leqslant K_2\}$ ($K_1, K_2 > 0$ — деякі константи) — обмежена та відділена від нуля область в H з гладкою межею $S_2 = \partial G_2$; $h \in L^2(G_2)$; $k \in C^1(G_2)$; $a \in C(G_2)$; $k(y) \geqslant \delta > 0$; $a(y) \geqslant \alpha > 0$; $\varphi \in \operatorname{Im}\gamma_2$.

***Теорема* 4.2.** *Функція* $u(y) = u_2(y)$ *буде розв'язком задачі*

$$\operatorname{div}_{G_2}\Big(k(y)\Big(\|y\|^2\, \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u(y) + \beta(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u(y), y)y\Big)\Big) - a(y)u(y) = h(y),$$

де $\beta > -1$, *з крайовою умовою*

$$\gamma_2(u) = \varphi$$

на області G_2 *тоді і тільки тоді коли функція* $u(x) = u_1(x) \triangleq u_2(F(x))$ *буде розв'язком наступної задачі Діріхле на області* $G_1 = F^{-1}(G_2)$:

$$\operatorname{div}_{G_1}\Big((k \circ F)\,\|\cdot\|^2\, \overline{\mathbf{grad}}_{G_1} u\Big) - (a \circ F)u = h \circ F,$$

$$\gamma_1(u) = \varphi \circ F,$$

де $F(x) = \|x\|^{\sqrt{1+\beta}-1}x$.

В прикладі 2 отримана крайова задача, асоційована зі стереографічною проекцією сфери, таким чином, проілюстрована робота методу дифеоморфізмів на ріманових многовидах, які не є областями в гільбертовому просторі.

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір, $\{e_1, e_2, \dots e_n, \dots\}$ — його ортонормований базис; $H_1 = \text{л.о.}\{e_2, \dots e_n, \dots\}$ — підпростір H корозмірності 1: $H = H_1 \oplus \text{л.о.}\{e_1\} \simeq H_1 \oplus \mathbb{R}$; $\varphi(x) = x - (x, e_1)e_1$ — ортопроектор на H_1; $\mathcal{M} = \{x \in H : \|x - e_1\| = 1, \|\varphi(x)\| < \alpha < 1, (x - e_1, e_1) < 0\}$ — частина нижньої напівсфери сфери S_1 з центром в e_1 радіуса 1 — ріманів многовид з рівномірним атласом, що складається з однієї карти $(\varphi, \mathcal{M})$ ($\varphi : \mathcal{M} \to \varphi(\mathcal{M}) = \{x \in H_1 : \|x\| < \alpha\}$) і основним тензором, індукованим вкладенням $\mathcal{M} \subset H$.

Теорема 4.3. *Функція $u(q) = u_1(q)$ буде розв'язком наступної крайової задачі на області $G_2 \subset B_1$ в гільбертовому просторі H_1*

$$\operatorname{div}_{G_2}\Bigg(\frac{(4+\|q\|^2)^2}{16}\,\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}\, u(q) -$$

$$-3\frac{1152 - 656\|q\|^2 + 76\|q\|^4 + 3\|q\|^6}{256(4-\|q\|^2)^2}(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}\, u(q), q)q\Bigg) - a(q)u(q) = f(q),$$

$$\gamma_2(u) = \varphi,$$

де $f \in L^2(G_2); a \in C(G_2); a(q) \geqslant \alpha > 0; \varphi \in \operatorname{Im}\gamma_2$,
в тому і тільки тому випадку, коли функція $u(p) = u_2(p) \triangleq u_1(F(p))$ буде розв'язком наступної задачі Діріхле на області $G_1 = F^{-1}(G_2)$ на рімановому многовиді $\mathcal{M}$:

$$\Delta_{G_1} u - (a \circ F)u = f \circ F,$$

$$\gamma_1(u) = \varphi \circ F.$$

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню крайових задач в області на нескінченновимірних ріманових многовидах. Основні результати роботи:

1. Наведено нетривіальний приклад метрично повного нескінченновимірного ріманового многовиду.

2. Одержано технічні умови на ріманів многовид, за яких стає можливим встановити коректність певного класу задач Діріхле для рівнянь з лапласіаном за мірою.

3. Побудовано нетривіальний приклад нескінченновимірного ріманового многовиду, що реалізує всі технічні умови, використані при побудові лапласіана в L^2-версії та доведенні коректності задачі Діріхле.

4. Досліджено перетворення задачі Діріхле спеціального типу при дифеоморфному відображенні між рімановими многовидами.

Публікації за темою дисертації:

1. *Богданский Ю. В., Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. I // *Укр. мат. журн.* — 2016. — Т. 68, № 7. — С. 897–907. (Входить до Scopus, Web of Science. Особистий внесок — кроки 3-5 доведення основної теореми (Теорема 1) роботи).

2. *Богданский Ю. В., Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. II // *Укр. мат. журн.* — 2016. — Т. 68, № 11. — С. 1443–1449. (Входить до Scopus, Web of Science. Особистий внесок — крок 3 доведення основної теореми (Теорема 3) роботи).

3. *Потапенко О. Ю.* Нескінченновимірні ріманові многовиди з рівномірною структурою // *Наукові вісті НТУУ "КПІ"*. — 2016. — Т. 108, № 4. — С. 73–79. (Входить до WorldCat, Google Scholar).

4. *Потапенко А. Ю.* Краевая задача, ассоциированная с диффеоморфизмом между римановыми многообразиями // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2018. — № 1. — С. 132–140. (Входить до Index Copernicus, Google Scholar).

5. *Потапенко А. Ю.* Пример исследования корректности краевых задач на основе метода диффеоморфизмов // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2018. — № 3. — С. 91–97. (Входить до Index Copernicus, Google Scholar).

6. *Потапенко А. Ю.* Бесконечномерные римановы многообразия с равномерной структурой. Лапласиан по мере и задача Дирихле // Матеріали конференції XIV Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики", том 2. — 05.2016. — С. 67–70.

7. *Потапенко А. Ю.* Расширение класса корректных краевых задач на области в римановом многообразии методом диффеоморфизмов // Збірник наукових праць "Велес" за матеріалами III Міжнародної Конференції "Зимові наукові читання", 1 частина. — 01.2018. — С. 78–87.

8. *Potapenko O. Yu.* Diffeomorphism-associated boundary value problem on a Riemannian manifold // Book of abstracts of the 4th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Ukraine Valery Sergeevich Melnik. — 2018. — P. 58.

АНОТАЦІЯ

Потапенко О. Ю. Крайові задачі на нескінченновимірних многовидах — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз" — Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", МОН України, Київ, 2019.

Дисертація присвячена побудові і дослідженню крайових задач в області на нескінченновимірних многовидах і просторах.

Запропонована умова рівномірності атласу ріманового многовиду, виконання якої дозволяє довести метричну повноту многовиду за внутрішньою метрикою. Доведено, що при виконанні певних додаткових умов, які, зокрема, виконуються при умові рівномірності атласу, внутрішня метрика є узгодженою з вихідною топологією многовиду. Показано, що при виконанні певних умов межа області та поверхня сумісного рівня функцій в гільбертовому просторі є рімановими многовидами з рівномірними атласами.

Запропоновано L^2-версію лапласіана за мірою на (нескінченновимірному) рімановому многовиді. Наведено модельний приклад рівномірного ріманового многовиду, для якого реалізуються всі умови, використані при побудові уведеного лапласіана і при доведенні коректності задач Діріхле певного класу.

Досліджено дифеоморфне відображення між нескінченновимірними рімановими многовидами з рівномірними атласами як спосіб розширення класу коректних крайових задач. Наведено два приклади використання методу дифеоморфізмів.

Ключові слова: гільбертів простір, ріманів многовид, борелівська міра, диференціювання мір, оператор Лапласа, задача Діріхле.

АННОТАЦИЯ

Потапенко А. Ю. Краевые задачи на бесконечномерных многообразиях — На правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — "Математический анализ" — Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского", МОН Украины, Киев, 2019.

Диссертация посвящена построению и исследованию краевых задач в области на бесконечномерных многообразиях и пространствах.

Предложено условие равномерности атласа риманова многообразия, выполнение которого позволяет доказать метрическую полноту многообразия по внутренней метрике. Доказано, что при выполнении некоторых дополнительных условий, которые, в том числе, выполняются в случае равномерности атласа, внутренняя метрика согласована с исходной топологией многообразия. Показано, что при выполнении некоторых условий граница области и поверхность совместного уровня в гильбертовом пространстве есть римановы многообразия с равномерными атласами.

Предложена L^2-версия лапласиана по мере на (бесконечномерном) римановом многообразии. Приведен модельный пример равномерного риманова многообразия, для которого реализуются все условия, использованные при построении введеного лапласиана и при доказательстве корректности задач Дирихле определённого класса.

Исследовано диффеоморфное отображение между бесконечномерными римановыми многообразиями с равномерными атласами как способ расширения класса корректных краевых задач. Приведено два примера использования метода диффеоморфизмов.

Ключевые слова: гильбертово пространство, риманово многообразие, борелевская мера, дифференцирование мер, оператор Лапласа, задача Дирихле.

ABSTRACT

Potapenko O. Yu. Boundary value problems on infinite-dimensional manifolds — Published in manuscript form.

PhD Thesis in specialty 01.01.01 “Mathematical Analysis” — National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, MES of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis deals with constructing and studying boundary value problems in domains in infinite-dimensional spaces and manifolds. Research of boundary value problems with infinite-dimensional argument is one of the most important tasks of functional analysis. One of the research subjects of functional analysis are infinite-dimensional topological vector spaces, their mappings and relevant objects. Historically functional analysis emerged as a mean to research Fourier transformation, differential and integral equations. Starting from the second half of XX-th century functional analysis expanded to include a range of new sections via generalizing classical finite-dimensional theory results to infinite-dimensional case.

The main part of the thesis consists of an introduction, four sections, divided into subsections, conclusions, list of references and an appendix with the list of the author’s publications concerning the topic of the thesis and the scientific seminars and conferences, at which the obtained results were reported.

The introduction grounds the relevance of the research topic, gives short historical review of its state, formulates the purpose and tasks of the research, indicates the scientific novelty and also points out where the results of the dissertation have been discussed and published.

Section 1 provides review of works, which are relevant to the topic of the dissertation research. A review of classical results of Riemannian geometry, that relate to the subject of research, is given, i.e., definition of a Riemannian manifold, metric

tensor existence, Riemannian connection, Levi–Civita connection and completeness of a Riemannian manifold. A number of modern papers on Riemannian geometry, that consider elliptical equations on Riemannian manifolds, is reviewed. Fomin and Skorokhod directional differentiabilities of measures, differentiabilty along vector fields, are reviewed, connection between them is established.

Section 2 considers infinite-dimensional Riemannian manifolds. The construction of internal metric is considered on a connected Riemannian manifold, i.e., infimum of lengths of piecewise smooth curves that connect respective points. It is shown that the topology of a connected Riemannian manifold, induced by the internal metric, is not weaker than the original topology.

A condition of the atlas uniformity of a Riemannian manifold is proposed. It is proved that a uniform Riemannian manifold is complete with respect to the internal metric. It is shown that under some additional conditions, which hold in case of a uniform atlas, internal metric is consistent with the original manifold's topology. Actually, the conditions needed to prove internal metric consistency, are weaker than atlas uniformity, however due to the need for metric completeness, we expect Riemannian manifolds uniformity later throughout the dissertation.

In order to give a non-trivial example, it is shown that, when some additional conditions hold, a domain boundary and a joint function level surface are Riemannian manifolds with uniform atlases.

In Section 3 L^2-version of Laplacian on an (infinite-dimensional) Riemannian manifold is introduced. We prove the correctness of Dirichlet problem for equations with the introduced Laplacian in a domain in a Riemannian manifold of a certain class. Correctness is considered as existence and uniqueness of a problem's solution.

A model example of a uniform Riemannian manifold, for which all the technical conditions, used to prove correctness of the given Dirichlet problem, is given.

L^p_v vector fields spaces are introduced, in a similar fashion to the way that Bochner integrability is built. Integral of an integrable vector field does not make sense unless the manifold is embedded in a vector space. It is proved that a measurable vector field belongs to L^p_v if and only if its norm belongs to the corresponding L^p functional space. L^p_v completeness is proven. L^2_v is in particular used to construct the Laplacian.

Section 4 examines a diffeomorphic mapping between infinite-dimensional Riemannian manifolds with uniform atlases, as a mean to extend the class of correct boundary value problems.

Two examples are given to illustrate the diffeomorphisms method. The first example proves correctness of a certain class of boundary value problems in a domain in a Hilbert space. The second constructs a boundary value problem, associated with stereographical sphere projection, hence illustrating the diffeomorphisms method on Riemannian manifolds that are not domains in a Hilbert space.

Keywords: Hilbert space, Riemannian manifold, Borel measure, differentiation of measures, Laplace operator, Dirichlet problem.